

Verbesserte Methode zur Bestimmung der Retentionsfunktion aus statischen Säulenexperimenten

A. Peters¹ und W. Durner¹

Einleitung

Für die Beschreibung der Wasserbewegung in der ungesättigten Bodenzone mit der Richardsgleichung werden die Retentions- und die Leitfähigkeitsfunktion benötigt. Bei der Schätzung der Retentionsfunktion aus hydrostatischen Gleichgewichtsexperimenten wird üblicherweise so vorgegangen, dass der für eine Druckstufe gemessene mittlere Wassergehalt in einer Bodensäule $\bar{\theta}_i$ dem jeweiligen mittleren Matrixpotenzial \bar{h}_i zugeordnet wird. An die so erhaltenen Datenpaare kann dann eine parametrische Retentionsfunktion $\theta(h)$ unter Minimierung einer sogenannten Zielfunktion angepasst werden. Dieses Konzept, das im folgenden „klassische Methode“ genannt wird, ist strikt nur korrekt für lineare $\theta(h)$ -Beziehungen.

Ziel dieses Beitrags ist es, in einer Sensitivitätsstudie die Größe des durch die Linearisierungsannahme gemachten Fehlers in Abhängigkeit von Bodenmaterial und Säulenhöhe darzustellen, sowie die Auswirkungen auf Folgefehler, wie die Wahl des falschen Retentionsmodells und die Fehlerfortpflanzung bei der Leitfähigkeitsvorhersage zu beleuchten. Es wird weiter gezeigt, wie der Fehler durch eine korrekte Formulierung der Zielfunktion („integrale Methode“) vermieden werden kann.

Material und Methoden

Funktionsanpassung

Die zu minimierende Zielfunktion für die integrale Methode wird durch Gleichung 1 beschrieben:

$$\Phi(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^r w_i \left[\bar{\theta}_i - \frac{1}{L} \int_{h_{UR_i}}^{h_{OR_i}} \hat{\theta}(\boldsymbol{\beta}, h) dh \right]^2 \quad (1)$$

wobei r die Anzahl und w_i die Wichtungen der Messungen sind. L ist die Säulenhöhe, h_{UR} und h_{OR} sind die Potenziale am unteren, bzw. am oberen Rand und $\boldsymbol{\beta}$ ist der zu optimierende Parametervektor. Die Modellvorhersage ist in diesem Fall das Integral der Wassergehaltsverteilung über die in der Bodensäule herrschende hydrostatische Potenzialverteilung.

Sensitivitätsanalyse

Im ersten Teil der Sensitivitätsstudie wurden

ausgehend von einem Standardszenario mit einer Säulenhöhe L von 4 cm und der van Genuchten-Funktion ($\alpha = 0.2$ [cm⁻¹], $n = 8.0$, $\theta_r = 0.05$, $\theta_s = 0.4$, $m = 1-1/n$) die Parameter L , α und n variiert. Mit den einzelnen Parametersätzen wurden synthetische „Messdaten“ erzeugt, an denen dann das van Genuchten-Retentionsmodell mit der klassischen Methode angepasst wurde.

Im zweiten Teil wurden synthetische Messdaten für ein Brooks-und-Corey-Modell und einer bimodalen van Genuchten-Funktion erzeugt, um aufzuzeigen, dass die klassische Methode zu der Wahl des „falschen“ Retentionsmodells führen kann.

Im dritten Teil wurde das Mualem-Integral für die wahren und für die klassisch geschätzten Retentionsfunktionen gelöst um die Fortpflanzung des Linearisierungsfehlers in die relative hydraulische Leitfähigkeitsfunktion zu untersuchen.

Anwendung auf Realdaten

Weiterhin wurde ein statisches Säulenexperiment mit einem realen Boden (Grobsand, Körnung 0.3 bis 0.9 mm) in einer 13.8 cm hohen Säule durchgeführt, um anhand der Daten die klassische Methode mit der integralen zu vergleichen.

Ergebnisse und Diskussion

Der Linearisierungsfehler kann mit Zunahme von α und n (hier nicht gezeigt), oder bei Zunahme der Säulenhöhe (Abb. 1a), beträchtlich werden. Daraus folgt, dass bei groben, gut sortierten Materialien und relativ hohen Säulen die klassische Methode zu großen systematischen Fehlern in der Schätzung der Retentionsfunktion führt.

Abbildung 1b demonstriert beispielhaft die Auswirkungen des Linearisierungsfehlers auf die Modellwahl. Gezeigt sind die vorgegebene Brooks-und-Corey-Funktion, sowie die daraus resultierenden „Messdaten“. Diese Daten sind um den Lufttrittspunkt stark geglättet und verleiten dazu, ein anderes Modell zu wählen. Das klassisch gefittete van Genuchten-Modell zeigt eine außerordentlich gute Anpassung. Faktisch wird hier jedoch ein „falsches“ Modell an „falsche“ Daten angepasst. Die Auswirkungen des Linearisierungs- und Modellfehlers auf die Vorhersage der Leitfähigkeitsfunktion sind in Abb. 1c und 1d am Beispiel einer bimodalen Retentionskurve dargestellt. Wie bei der Brooks-und-Corey-Funktion werden durch die klassische Methode scharfe Änderungen geglättet. Wird aus der Retentionskurve die relative Leitfähigkeitsfunktion abgeschätzt, so kann die wahre Funktion um eine Größenordnung unterschätzt werden.

¹Technische Universität Braunschweig, Institut für Geoökologie, Langer Kamp 19c, 38106 Braunschweig. e-mail: a.peters@tu-bs.de

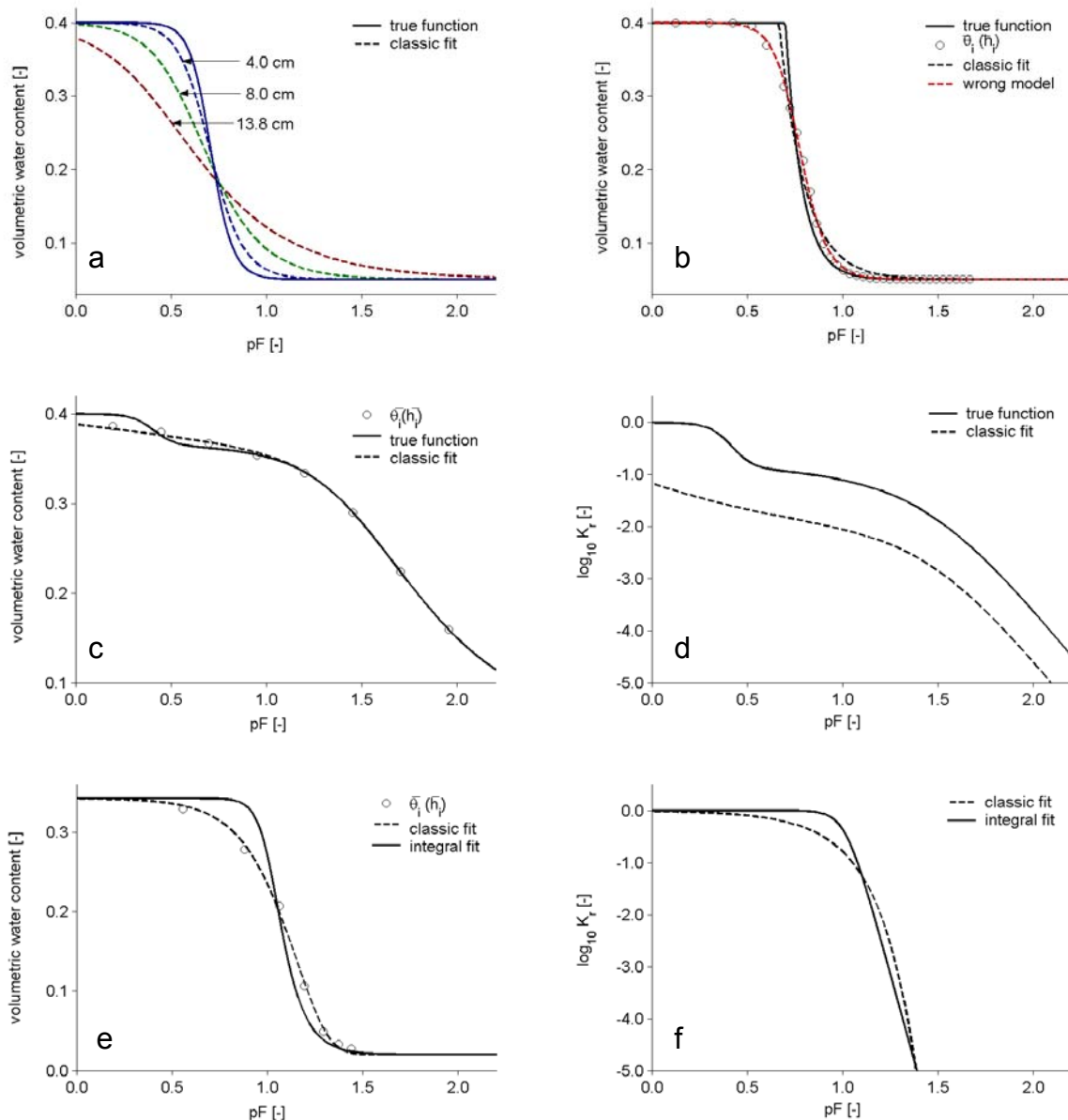


Abb. 1: a) Van Genuchten-Retentionsfunktionen, Vergleich der wahren Funktion mit den mit der klassischen Methode ermittelten; Säulenlänge L variiert. b) Illustration der Auswirkungen des Linearisierungsfehlers auf die Modellwahl; wahre Funktion: Brooks und Corey; „falsche“ Funktion: van Genuchten. c) Vergleich einer wahren Funktion mit klassischem Fit bei einer bimodalen Retentionsfunktion. d) Vorhersage der relativen hydraulischen Leitfähigkeit aus c) mit dem Mualem-Integral. e) Anwendung der klassischen und integralen Methode auf reale Messdaten. f) aus e) resultierende Vorhersage der relativen hydraulischen Leitfähigkeit.

In Abb. 1e sind die realen Messdaten und die Retentionsfunktionen aus der klassischen und der integralen Methode dargestellt. Auch hier ist eine deutliche Abweichung der beiden Methoden zu erkennen. Die daraus resultierende Abweichung der vorhergesagten relativen hydraulischen Leitfähigkeit nach Mualem ist in Abb. 1f zu sehen.

Schlussfolgerungen

Bei der klassischen Methode zur Schätzung der Retentionsfunktion aus hydrostatischen Gleichgewichtsexperimenten wird immer ein

Linearisierungsfehler gemacht. Dieser ist umso größer, je länger die Säule, je grobkörniger das Material und je enger die Porengrößenverteilung ist. Weiterhin kann die Nichtberücksichtigung des Linearisierungsfehlers zur Wahl eines „falschen“ Retentionsmodells verleiten und die Leitfähigkeitsvorhersage verfälschen.

Der Fehler kann durch die integrale Formulierung der Zielfunktion bei der Parameterschätzung nach Gl. (1) ohne weiteres vermieden werden. Ein Programm hierzu, das gängige Typen von Retentionsfunktionen umfasst, wird auf www.soil.tu-bs.de bereitgestellt werden.